Universidad Simón Bolívar
Matemáticas I (MA-1111)
Tercer Examen Parcial

Elaborado por: Miguel Ángel Labrador
Ingeniería Electrónica
Carnet: 12-10423
Correo: miguelangel2801@gmail.com
Twitter: @miguelangel2801

PREPARADURÍA Nº 9

Matemáticas I (MA-1111)

Gráficas de Funciones.

Máximos y mínimos, monotonía, concavidad y graficación de funciones.

Ejemplo 1: Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 4x - 4}{2x^3 - 2x^2}$$

Determine:

(a). Dominio.

(b). Puntos de corte .

(c). Asíntotas .

(d). Puntos críticos.

(e). Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía).

(f). Máximos y mínimos.

(g). Concavidad.

(h). Puntos de inflexión.

(i). Bosquejo de la gráfica.

Solución:

Dominio:

f es el cociente de dos polinomios por lo que su dominio son todos los valores reales excepto aquellos para los que el denominador se anula. En este caso el denominador es cero cuando $x = 0$

o $x = 1$, sin embargo cuando evaluamos $f(x = 1)$ obtenemos obtenemos un $\frac{0}{0}$ quiere decir que podemos simplificar.

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 4x - 4}{2x^3 - 2x^2} = \frac{x^2(x^2-1) + 4(x-1)}{2x^2(x-1)} = \frac{(x-1)[x^2(x+1)+4]}{2x^2(x-1)} = \frac{x^3 + x^2 + 4}{2x^2}$$

ahora es evidente que $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte:

Cortes en y:

Hacemos $f(0)$ pero como $x = 0$ no está en el dominio $\nexists f(0)$ y no hay corte con el eje y.

Cortes en x:

Hacemos $f(x) = 0$ y nos queda:

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 4 &= 0 \\ (x+2)(x^2 - x + 2) &= 0 \\ x + 2 &= 0 \quad \text{(el factor cuadrático nunca es cero y lo podemos pasar diviendo.)} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$x = -2$ es una raíz de la función por lo tanto el corte ocurre en el punto $(-2, 0)$.

Asíntotas:

Como la función no está definida en $x = 0$ se sospecha que hay una asíntota horizontal allí. Verificamos tomando límites:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 + x^2 + 4}{2x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 + x^2 + 4}{2x^2} = +\infty$$

En efecto hay una asíntota horizontal en $x = 0$.

Asíntotas al infinito:

Hacia $+\infty$:

Verificamos si hay alguna asíntota horizontal. Tomamos el límite cuando $x \to +\infty$ de la función:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 4}{2x^2} = +\infty \qquad \text{(No hay asíntota horizontal.)}$$

*Como el grado del numerador es mayor, por una unidad, que el grado del denominador se sospecha que hay una **asíntota oblicua***

En caso de que exista la asíntota oblicua, esta vendrá dada por la ecuación $y = mx + b$ (una recta), donde:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+4}{2x^3} = \frac{1}{2} \qquad \text{(Pendiente.)}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+4}{2x^2} - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+4-x^3}{2x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{2x^2} = \frac{1}{2} \qquad \text{(Ordenada del origen.)} \end{aligned}$$

Hemos conseguido que sí hay una asíntota oblicua de la forma $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

Hacia $-\infty$:

Lo cálculos son exactamente iguales. No existe asintota horizontal y tendremos que también hay una asíntota oblicua de la misma ecuación.

Puntos críticos:

Teorema de puntos críticos

Sea c un punto dentro del dominio de una función f, si $f(c)$ es un valor extremo entonces c puede ser un punto:

- **Frontera**: *Son los puntos que son la frontera entre donde está definida la función y vacío. (funciones definidas en intervalos cerrados $[a, b]$ o semi cerrados $(-\infty, a]$ o $[b, +\infty)$).*
- **Singular:** *Son valores de x donde la primera derivada no está definida, $\nexists f'(x)$.*
- **Estacionarios :** *Son valores de x donde la primera derivada se anula, $f'(x) = 0$.*

Para este ejercicio **no tenemos puntos frontera** ya que f está definida $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ o lo que es igual $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, o sea la función existe en todas partes, solo no existe en $x = 0$.

Para los puntos singulares y estacionarios calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(2x^2)-(x^3+x^2+4)(4x)}{4x^4} = \underbrace{\frac{x^3-8}{2x^3}}_{\text{Derivada simplificada}}$$

Un posible punto singular pudiera ser $x = 0$ ya que la primera derivada no está definida en este punto, sin embargo la definición dice que c debe pertenecer al dominio, luego $x = 0$ **no es un punto singular** .

Para los estacionarios, buscamos los puntos donde $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x^3-8}{2x^3} &= 0 \\ x^3-8 &= 0 \\ (x-2)(x^2+2x+4) = 0 & \qquad \text{(Producto notable } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)) \end{aligned}$$

Como el polinomio de segundo grado no se puede factorizar (discriminante menor que cero) entonces $f'(x) = 0$ cuando $x = 2$, por lo tanto este es un **punto estacionario** .

Entonces para $f(x)$:

- No hay puntos frontera
- No hay puntos singulares
- El único punto estacionario es $x = 2$

Monotonía:

Debemos estudiar en qué intervalo la función es creciente y en cuáles es decreciente.

Definición de funciones crecientes y decrecientes

*Una función es **creciente** en un intervalo (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ se cumple:*

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

*Análogamente una función es **decreciente** en un intervalo (a, b) si para todo $x_1, x_2 \in (a, b)$ se cumple:*

$$x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Teorema de monotonía

Sea f una función derivable en un intervalo (a, b):

- *Si $f'(x) > 0$ para todo valor de x dentro de (a, b) entonces f es* ***creciente*** *en el intervalo (a, b).*
- *Si $f'(x) < 0$ para todo valor de x dentro de (a, b) entonces f es* ***decreciente*** *en el intervalo (a, b).*

Estudiamos la monotonía de f, para ello debemos estudiar el signo de su primera derivada. Recordemos que para estudiar el signo de este tipo de expresiones buscamos cuales son sus raíces y los puntos que no pertenezcan a su dominio.

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{2x^3} = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{2x^3}$$

De aquí vemos que los puntos $x = 2$ y $x = 0$ serán nuestros puntos de interés que nos generan tres intervalos donde estudiaremos el signo de la derivada.

Acá podemos prescindir el factor $x^2 + 2x + 4$ ya que sabemos que es siempre positivo y no aportará ningún cambio en el signo de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$x - 2$	-	-	+
$2x^3$	-	+	+
$f'(x) = \frac{x^3-8}{2x^3}$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Del estudio hemos obtenido que por **Teorema de monotonía**:

- f es **creciente** en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(2, +\infty)$
- f es **decreciente** en el intervalo $(0, 2)$

Máximos y mínimos:

Definición de máximos y mínimos locales (relativos).

- *Se dice que $f(c)$ es un* ***valor máximo local*** *de f si en un intervalo (a, b) que está dentro del dominio de f y que contiene a c se cumple que $f(c) > f(x)$ para toda $x \neq c$ dentro de (a, b) .*

- *Se dice que $f(c)$ es un* ***valor mínimo local*** *de f si en un intervalo (a,b) que está dentro del dominio de f y que contiene a c se cumple que $f(c) < f(x)$ para toda $x \neq c$ dentro de (a,b) .*

- *$f(c)$ es un* ***valor máximo global*** *de f si para $Domf$ que contiene a c se cumple que $f(c) > f(x)$ para toda $x \neq c$.*

- *$f(c)$ es un* ***valor mínimo global*** *de f si para $Domf$ que contiene a c se cumple que $f(c) < f(x)$ para toda $x \neq c$.*

Los valores máximos o mínimos se alcanzan siempre en los puntos críticos.

Para saber si en $x = 2$ se alcanza un máximo o un mínimo podemos aplicar el ***criterio de la primera derivada*** o ***el criterio de la segunda derivada***. Es importante recordar que estos criterios solamente nos dicen si se alcanza un máximo mínimo local (relativo).

Criterio de la primera derivada

Sea f una función derivable en el intervalo (a,b) y c un punto crítico de f contenido en dicho intervalo.

- *Si f es creciente en (a,c) y decreciente en (c,b) entonces decimos que f alcanza un* ***valor máximo local*** *en (a,b) dado por $f(c)$.*

- *Si f es decreciente en (a,c) y creciente en (c,b) entonces decimos que f alcanza un* ***valor mínimo local*** *en (a,b) dado por $f(c)$.*

Del estudio de signos hecho en la parte anterior tenemos que f es **decreciente** en el intervalo $(0,2)$ y **creciente** en el intervalo $(2,+\infty)$.

Por lo tanto, por Criterio de la Primera Derivada, en $x = 2$ se alcanza un **valor mínimo local**.

Luego el **punto mínimo local** es: $(2, f(2)) = (2,2)$

También tenemos que f es **creciente** en los intervalos $(-\infty,0)$ y **decreciente** en el intervalo $(0,2)$, sin embargo en $x = 0$ **no se alcanza un valor máximo** local ya que $x = 0$ no pertenece al dominio de f y por lo tanto no es un punto crítico.

Nota: Se pudo haber usado también el criterio de la segunda derivada para verificar que en $x = 2$ se alcanza un punto mínimo de f.

Concavidad:

Teorema de Concavidad.

Sea f una función derivable dos veces en el intervalo (a, b)

- *Si $f''(x) > 0$ para toda x en (a, b) entonces f es cóncava hacia arriba.*
- *Si $f''(x) < 0$ para toda x en (a, b) entonces f es cóncava hacia abajo.*

Calculamos la segunda derivada, que es la derivada de la primera derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^3-8}{2x^3}\right)' = \frac{(3x^2)(2x^3)-(x^3-8)(6x^2)}{4x^6} \\ &= \frac{6x^5-6x^5+48x^2}{4x^6} = \frac{12}{x^4} \end{aligned}$$

De aquí vemos que como $f''(x) > 0$ siempre excepto en $x = 0$ por ser cociente entre un número positivo y un monomio de grado par (siempre positivo) entonces:

Por **Teorema de concavidad** f es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ o lo que es igual en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Puntos de inflexión:

Definición de un punto de inflexión

Sea f una función dos veces derivable en (a, b) y c un punto perteneciente a dicho intervalo.

*Si f es **cóncava hacia arriba** en (a, c) y **cóncava hacia abajo** en (c, b) entonces decimos que f alcanza un punto de inflexión en $x = c$ dado por $f(c)$.*

De la segunda derivada podríamos sospechar que $x = 0$, donde esta no existe, podría ser un punto de inflexión, también pudiéramos sospechar de las raíces de la segunda derivada, si las hubiera.

Sin embargo en $x = 0$ no se alcanza un punto de inflexión por dos razones importantes que usted debe entender. Del análisis de signos anterior observamos que f es siempre cóncava hacía arriba por lo tanto **no hay cambios de concavidad**. En caso de haber cambio de concavidad, en $x = 0$ **tampoco habría un punto de inflexión** pues $x = 0$ no pertenece a $\mathrm{Dom} f$.

Finalmente **no hay puntos de inflexión**.

Bosquejo de la gráfica:

Resumen de toda la información obtenida hasta ahora:

Dom$f = \mathbb{R} - \{0\}$ **Cortes con los ejes**: $(-2, 0)$ **Asíntota vertical:** $x = 0$

Asíntota horizontal: No **Asíntota oblicua:** $y = \dfrac{x+1}{2}$

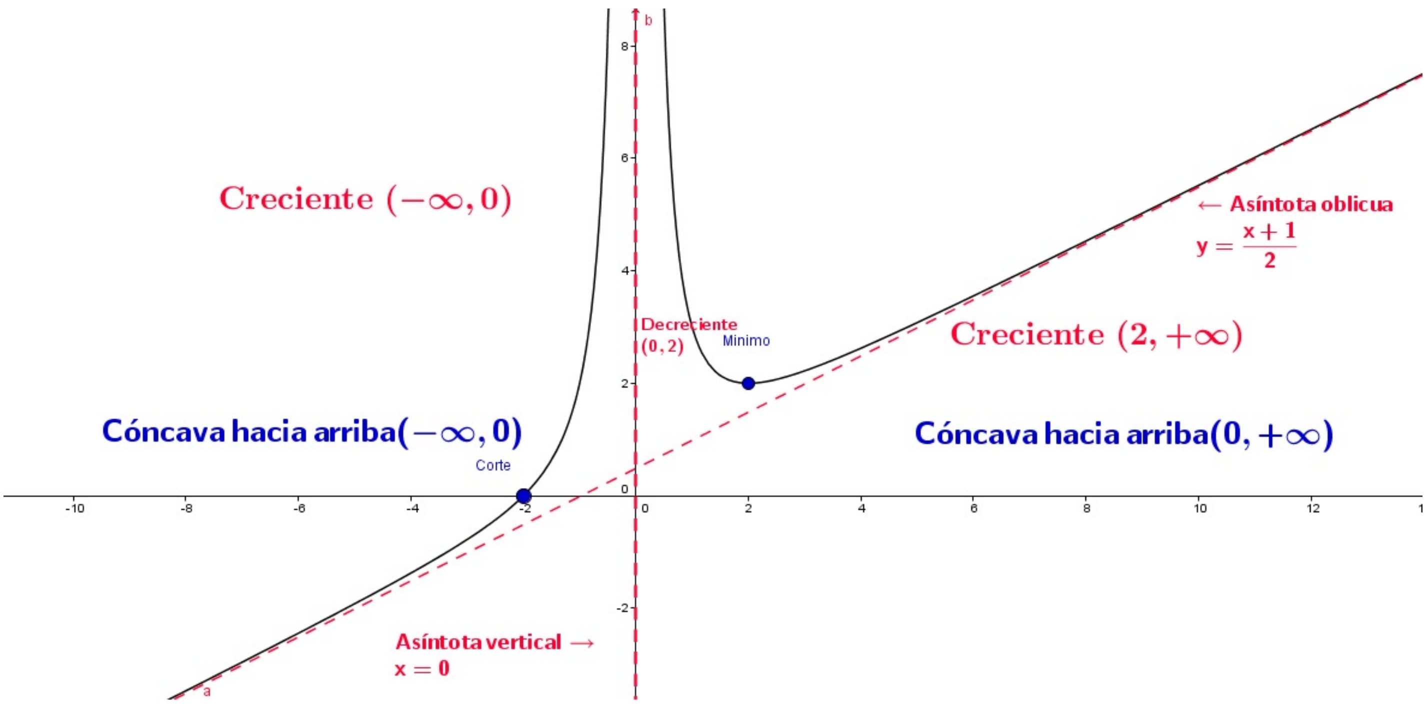
f **es creciente en:** $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

f **es decreciente en:** $(0, 2)$ **Máximo:** No hay **Mínimo:** $(2, 2)$

Cóncava hacia arriba en: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

Puntos de inflexión: No hay

Gráfica:



Ejemplo 2: Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Determine:

(a). Dominio.

(b). Puntos de corte .

(c). Asíntotas .

(d). Puntos críticos.

(e). Intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía).

(f). Máximos y mínimos.

(g). Concavidad.

(h). Puntos de inflexión.

(i). Bosquejo de la gráfica.

Solución:

Dominio:

Como se trata de una función racional su dominio son todos aquellos reales salvo donde se anula el denominador: $\mathbb{R} - \{1\}$.

Puntos de corte:

Cortes en y:

$$f(0) = \frac{0^2}{(0-1)^2} = 0$$

Luego f corta al eje y en el punto $(0, 0)$.

Cortes en x:

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2}{(x-1)^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Luego f corta al eje x e el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$.

La función corta a los ejes coordenados en el **origen**.

Asíntotas:

Asíntotas verticales:

Como la función no está definida en $x = 1$ anticipamos una asíntota vertical. Para verificar tomamos los límites:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty$$

En efecto, existe una asíntota vertical de la forma $x = 1$.

Asíntotas hacia $+\infty$:

Verificamos si existe alguna asíntota horizontal. Tomamos los límites cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$$

Tenemos que existe una asíntota horizontal de la forma $y = 1$ hacia $+\infty$.

Puesto que ya tenemos una asíntota horizontal, no es necesario verificar si existen asíntotas oblicuas hacia $+\infty$.

Asíntotas hacia $-\infty$:

Verificamos si existe alguna asíntota horizontal. Tomamos los límites cuando $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$$

Tenemos que existe una asíntota horizontal de la forma $y = 1$ hacia $-\infty$.

Hemos verificado que existe una **asíntota horizontal** de la forma $y = 1$.

Puntos críticos:

- No existen puntos frontera pues la función está definida en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x = 1$.
- Para ver si existen puntos singulares calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - 2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^3} = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

  Note que el único punto donde no existe la derivada es $x = 1$, sin embargo no pertenece al dominio ergo **no hay punto singulares**.

- Para los puntos estacionaros veamos donde se anula la primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{2x}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Luego $x = 0$ es un **punto estacionario**.

Monotonía:

Para saber dónde f es creciente o decreciente estudiamos el signo de la primera derivada.

Tomaremos como puntos de interés la raíces de la función y los puntos que no pertenezcan al dominio, es decir, $x = 0$ y $x = 1$. Observe que estos dos puntos cortan la recta real en tres intervalos como se ilustra en el cuadro:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$-2x$	$+$	-	-
$(x-1)^3$	-	-	$+$
$f'(x) = -\frac{2x^2}{(x-1)^3}$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

De acá tenemos que:

f es **creciente** en $(0, 1)$.

f es **decreciente** en $(-\infty, 0)$ y $(1, +\infty)$.

Máximos y mínimos:

Para hallar los máximos o mínimos podemos usar la información obtenida del cuadro anterior o calcular la segunda derivada para usar el *Criterio de la Segunda Derivada*, como el cuadro ya está hecho optaremos por la primera opción.

Vea que la función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, 1)$ (intuitivamente, pareciera que en $x = 0$ se alcanza un mínimo) de modo que por el **Criterio de la Primera Derivada** se alcanza un **mínimo local** en $\mathbf{x = 0}$.

Como la función crece en $(0, 1)$ y decrece $(1, +\infty)$ parecería que en $x = 1$ se alcanza un máximo local pero debe recordar que este punto no pertenece al dominio, luego **no hay máximos locales**.

f **no alcanza valores máximos globales** pues no existen máximos locales. Para saber si en $x = 0$ se alcanza un mínimo global vea que la función se acerca a la asíntota horizontal cuando x tiende a infinito. Por otro lado cuando x se acerca a uno la función tiende a infinito positivo y como no hay otros mínimos locales no hay por que pensar que la función alcanza valores menores al que se alcanza en $x = 0$ de manera que podemos decir que en $x = 0$ se alcanza un **mínimo global**.

Concavidad:

Para la concavidad calcularemos la segunda derivada de f.

$$f''(x) = -\frac{2(x-1)^3 - 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = -\frac{2(x-1) - 6x}{(x-1)^4} = -\frac{-4x-2}{(x-1)^4} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

Ahora estudiemos el signo de la segunda derivada.

Podría pensar que tomaremos como puntos de interés la raíces y los puntos donde se anula el denominador porque ya lo hemos hecho, no obstante nunca olvide que las matemáticas no son una receta. Mire que el denominador es siempre positivo, se trata de un factor elevado a una potencia par, de manera que lo que define el signo de la segunda derivada es el numerador.

Veamos el signo del numerador:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, +\infty)$
$4x+2$	-	$+$
$f'(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$	$\cap$	$\cup$

Luego:

f es **cóncava hacia abajo** en $(-\infty, -\frac{1}{2})$

f es **cóncava hacia arriba** en $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

Puntos de inflexión:

Vea que la concavidad de f cambia para un valor alcanzado en $x = -\frac{1}{2}$, además como este punto pertenece al dominio de f podemos afirmar que existe un punto de inflexión dado por:

$$\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9}\right) \qquad \text{(Punto de inflexión.)}$$

Resumen de toda la información obtenida hasta ahora:

Dom$f = \mathbb{R} - \{1\}$ **Cortes con los ejes**: $(0,0)$ **Asíntota vertical:** $x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 1$ **Asíntota oblicua:** No hay

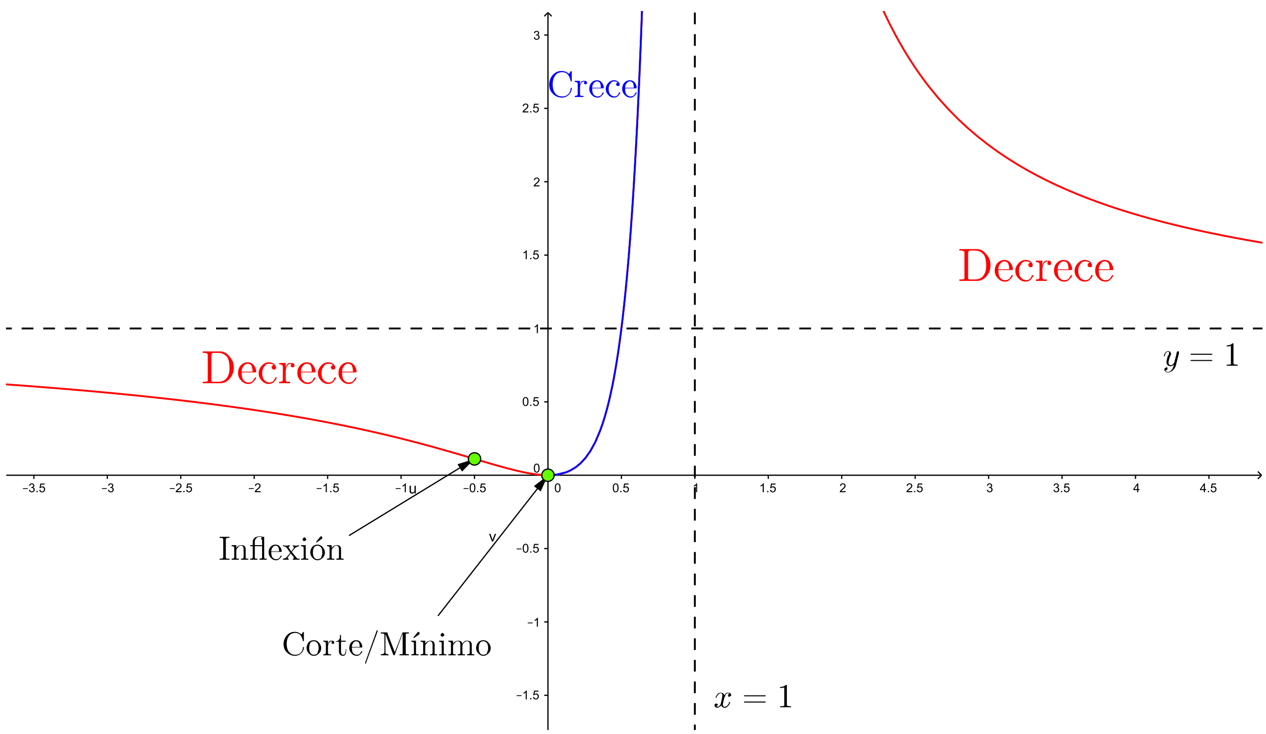
f **es creciente en:** $(0,1)$

f **es decreciente en:**$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ **Máximos:** No hay **Mínimos:** $(0,0)$

Cóncava hacia arriba en: $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ **Cóncava hacia abajo en:** $(-\infty, -\frac{1}{2})$

Puntos de inflexión: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9}\right)$

Bosquejo de la gráfica:



<u>**Ejemplo 3:**</u> Considere la función $\mathbf{f(x) = -\sqrt{2}x + \sqrt{x+1}}$

Determine:

(a). Dominio.

(b). Asíntotas.

(c). Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(d). Dónde f alcanza valores máximos y mínimos locales y globales.

Solución:

Dominio:

Recordemos que el dominio de la suma de dos funciones es la intersección del dominio de cada función.

$$Dom[-\sqrt{2}x] = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Dom}[\sqrt{\mathrm{x}+1}] = [-1, +\infty)$$

De modo que el dominio de f está dado por:

$$Domf = \mathbb{R} \cap [-1, +\infty) = [-1, +\infty)$$

Asíntotas:

Asíntotas verticales:

No hay asíntotas verticales pues la función es continua en todo su dominio. Si usted sospecha que en el punto $x = -1$ existe una asíntota vertical, se dará cuenta que, si toma límites cuando $x \to -1^{\pm}$, por un lado el límite existe y por el otro, al no existir la función, tampoco existe el límite.

Asíntotas horizontales:

Tomamos límites cuando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2}x + \sqrt{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-2x^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 2\right)}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{2}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 2\right)}{\sqrt{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{2}} = -\infty$$

Tomamos límites cuando $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{2}x + \sqrt{x+1} \qquad \text{(No existe.)}$$

Note que el límite no existe porque $\sqrt{x+1}$ no existe para valores menores que $x = -1$, es decir, menos existirá para $-\infty$.

Asíntotas oblicuas:

Si existe alguna asíntota oblicua, esta debe tener la forma $y = mx + b$.

Cuando $x \to +\infty$:

Para hallar m:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\sqrt{2}x + \sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\sqrt{2}$$

Para hallar b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} -\sqrt{2}x + \sqrt{x+1} - (-\sqrt{2}x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$$

Luego, como no existe ordenada del origen, **no hay asíntota oblicua hacia** $+\infty$.

Cuando $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{2}x + \sqrt{x+1}}{x} \qquad \text{(No existe.)}$$

Note que si se evalúa el término $\sqrt{x+1}$ cuando $x \to -\infty$ el límite no existe puesto que la función no está definida para valores menores que $x = -1$.

Como no existe un valor de m **no hay asíntota oblicua hacia** $-\infty$.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Calculamos la primera derivada de f:

$$f'(x) = -\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

No utilizaremos el cementerio para estudiar los signos de la función ya que se trata de una función algo distinta a las que hemos trabajado.

Recuerde el *Teorema de Monotonía*:

Si la primera derivada de f es positiva en algún intervalo (a, b) entonces la función es creciente en dicho intervalo.

Si la primera derivada de f es negativa en algún intervalo (a, b) entonces la función es decreciente en dicho intervalo.

De manera que el conjunto solución de la desigualdad

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$$

nos debe decir en qué intervalos la función es creciente.

Resolvemos la desigualdad:

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$$

Antes de operar la desigualdad **obligatoriamente usted debe darse cuenta** que la soluciones deben pertenecer al intervalo $(-1, \infty)$, es decir $x > -1$, de lo contrario no se satisface la desigualdad (haga la prueba si no está convencido).

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > \sqrt{2} \\ \\ x > -1 \end{cases}$$

Resolvemos aparte:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}} > \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{1}{4(x+1)} > 2 \Longleftrightarrow 1 > 8(x+1) \Longleftrightarrow 1 > 8x+8 \Longleftrightarrow -7 > 8x \Longleftrightarrow -\frac{7}{8} > x$$

Entonces:

$$-\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} > \sqrt{2} \\ \\ x > -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{7}{8} \\ x > -1 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cap (-1, +\infty)$$

De manera que f es **creciente** en $\left(-\infty, -\frac{7}{8}\right) \cap (-1, +\infty) = \left(-1, -\frac{7}{8}\right)$.

Por otro lado la función es **decreciente** en el resto de su dominio: $\left(-\frac{7}{8}, +\infty\right)$.

Máximos y mínimos:

Esta pregunta al igual que la anterior no se presta para que usted saque cuentas, es más una pregunta de análisis de la información que hemos recopilado.

Máximos locales:

Como la función crece en intervalo $\left(-1, -\frac{7}{8}\right)$ y decrece en $\left(-\frac{7}{8}, +\infty\right)$, por *Criterio de la Primera Derivada* f alcanza un **máximo local** en $x = -\frac{7}{8}$

Mínimos locales:

Los máximos y mínimos locales se alcanzan siempre en los puntos críticos, aunque este problema no obliga a calcularlos es bueno darse cuenta que $x = -\frac{7}{8}$ es un *punto estacionario* y que $x = -1$ es un *punto frontera.*

Recuerde la definición de mínimo local (presente en esta prepa), como $x = -1$ es un punto frontera y además f crece a partir de este punto, podemos decir que $x = -1$ es un **mínimo local**.

Máximo global:

Hemos visto que la función alcanza un mínimo global en $x = -1$ y que cuando $x \to +\infty$, la función tiende a $-\infty$ (lo hemos corroborado cuando calcábamos asíntotas horizontales). De manera que como la función no alcanza valores mayores que el alcanzado en $x = -\frac{7}{8}$ podemos decir que se trata de un **máximo global**.

Mínimo global:

No existe mínimo global puesto que la función decrece indefinidamente hacia $-\infty$.

Bibliografía.

- **Demidovich, B.** (1967). *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*(2a. ed.). Moscú: Editorial Mir.
- **Dennis, G. Zill y Warren, S. Wright.** (2011). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (4a. ed.).México, D. F.: McGraw Hill.
- **Valera, M. T.** *Guías de Ejercicios.* Universidad Simón Bolívar.
- **Guzmán M.A.** (2014). *Guía de Ejercicios de Matemáticas 1 con Soluciones.* Universidad Simón Bolívar.

Este material fue, resuelto y tipeado en LaTeX por Miguel Ángel Labrador para uso de toda la comunidad académica. Algunos ejercicios fueron tomados de parciales realizados en cursos de MA-1111 de la Universidad Simón Bolívar.

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección **miguelangel2801@gmail.com**.

Este material se actualizó por última vez en **diciembre de 2017**.